ALJABAR-C* DAN KEUNIKAN NORM C*

Trisno Ikhwanudin
PPPPTK TK dan PLB
trisno.ikhwanudin@gmail.com

ABSTRAK

Misalkan A sebuah aljabar Banach. A disebut aljabar-C* jika memenuhi identitas:* $\|a * a\| = \|a\|^2$, *untuk setiap* $a \in A$. *Pada tulisan ini akan dibahas sifat – sifat aljabar-C* beserta contoh dan keunikan normnya.*

ABSTRACT

Let A be a Banach algebra. A is called C*-algebra if it meets the identity:* $\|a * a\| = \|a\|^2$, *for each* $a \in A$.. *In this paper, the properties of C*-algebra along with examples and uniqueness of its norm will be discussed.*

Keywords: Aljabar-C*, Norm C*, Keunikan Norm C*.

A. PENDAHULUAN

Pendahuluan memuat tentang latar belakang, landasan teori, masalah, rencana pemecahan masalah dan tujuan penelitian. Pendahuluan ditulis menggunakan huruf Times New Roman ukuran 11, spasi 1 dan fist line 0,38 inch.

Gelfand dan Naimark mendefinisikan aljabar-C* adalah sesuatu yang lebih abstrak dari aljabar Banach kompleks yang dilengkapi dengan "operasi bintang" yaitu suatu konjugat linier dan pemetaan anti multiplikatif $*: A \to A\big(*(ab) = *(b) * (a)\big)$, yang memenuhi $a^{**} = a$ dan lebih penting lagi adalah memenuhi identitas:

$$\|a * a\| = \|a\|^2 \ldots\ldots(*).$$

Identitas ini dikenal dengan istilah identitas C*.

Catatan penting untuk aljabar-C* adalah bahwa aljabar Banach* tidak dapat menjadi aljabar-C* dengan lebih dari satu norm C*, suatu sifat yang sangat eksklusif dibandingkan dengan aljabar Banach yang masih mungkin memiliki beberapa norm ekuivalen. Jadi jika diberikan dua aljabar Banach* dengan dua norm berbeda yang memenuhi (*), maka hasilnya adalah dua aljabar-C* yang berbeda.

Untuk sampai ke definisi aljabar-C^*, kita memerlukan pengetahuan tentang ruang Banach.

B. RUANG BANACH

Sebelum ke definisi Ruang Banach, perhatikan beberapa definisi berikut ini:

Definisi 2.1. Ruang vektor

Ruang vektor adalah grup abelian aditif X (yang elemennya disebut vektor), dengan sifat :

Sebarang skalar α dan sebarang vektor x dapat dikombinasikan dengan suatu operasi perkalian untuk menghasilkan vektor αx; sehingga berlaku:

(1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
(2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
(4) $1.\, x = x$

dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{C}; x, y \in X$.

Definisi 2.2. Ruang Vektor Bernorm

Misalkan X adalah suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Norm di X adalah fungsi $\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}^+$ yang memenuhi :

(1) $\| x \| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$.
(2) $\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ untuk setiap $x \in X$.
(3) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$
(4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ untuk setiap $x,y \in X$.

Suatu ruang vektor X yang dilengkapi dengan norm $\| \, . \, \|$ disebut ruang vektor bernorm.

Contoh :
$X = \mathbb{C}$, dengan norm $\|x\| = \|x\|$, untuk setiap $x \epsilon X$.

Definisi 2.3. Ruang Lengkap

Misalkan $(X, \| \, . \, \|)$ adalah ruang vektor bernorm. Ruang X disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy (x_n) di X konvergen (di X).

Contoh:
Hinpunan bilangan real adalah ruang lengkap, seperti telah kita ketahui bahwa sebuah barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika merupakan barisan Cauchy. Himpunan barisan irasional bukan merupakan sebuah ruang lengkap, karena terdapat barisan bilangan irasional yang konvergen ke bilangan rasional.

Definisi 2.4. Ruang Banach

Ruang Banach adalah ruang vektor bernorm yang lengkap.
Contoh:
$X = R''$, dengan norm $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p\epsilon$

C. ALJABAR-C*

Sebelum ke definisi aljabar-C^*, perhatikan beberapa definisi berikut:

Definisi 3.1. Aljabar Banach

Misalkan $(A, \| \, . \, \|)$ adalah ruang Banach atas $\mathbb{C}$. A adalah aljabar Banach jika A aljabar dan memenuhi sifat : $\| ab \| \leq \| a \| \, \| b \|$ untuk setiap $a,b \in A$.

Definisi 3.2. Aljabar Banach*

Aljabar Banach A dengan involusi, yaitu suatu pemetaan $a \rightarrow a^*$ dari A ke A yang memenuhi :

1 $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} \, A^* + \bar{\mu} \, B^*$;
2 $(AB)^* = B^* A^*$;
3 $(A^*)^* = A$;
4 $\| A^* \| = \| A \|$.

disebut sebagai aljabar Banach* .

Definisi 3.3. Aljabar -C*

Suatu aljabar Banach* A disebut Aljabar-C^* jika berlaku identitas:

$\| a^*a \| = \| a \|^2$, untuk setiap $a \in A$.

Contoh :
1. Bilangan Kompleks

Kita ingat bahwa bilangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah ruang vektor. Ruang vektor $\mathbb{C}$ dilengkapi dengan norm harga mutlak adalah ruang vektor bernorm.
Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{C}$ adalah lengkap.
Misalkan sebarang barisan Cauchy di $\mathbb{C}$, tulis $z_n = x_n + iy_n$ dengan $(x_n), (y_n)$ barisan di $\mathbb{R}$.
Akan dibuktikan $(z_n) \rightarrow z$ di $\mathbb{C}$
Perhatikan bahwa jika (z_n) barisan Cauchy maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sedemikian hingga jika $m, n > N$ berlaku $\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 < \varepsilon}$.
Selanjutnya diperoleh ketaksamaan berikut:

$$|x_n - x_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2}$$
$$\leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 < \varepsilon}$$
$$|y_n - y_m| = \sqrt{(y_n - y_m)^2}$$
$$\leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 < \varepsilon}$$

Sehingga diperoleh barisan Cauchy bilangan real (x_n) dan (y_n). Perhatikan bahwa setiap barisan Cauchy bilangan real adalah konvergen, misalkan

$$(x_n) \rightarrow x \text{ dan } (y_n) \rightarrow y$$

dimana $x, y \in \mathbb{R}$ Berdasarkan teorema di bilangan kompleks, diperoleh:

$$(z_n) \rightarrow x + iy \in \mathbb{C}$$

Dengan demikian $\mathbb{C}$ adalah lengkap.

Selanjutnya $\mathbb{C}$ dengan operasi aljabar biasa memenuhi sifat :

$\|zw\| \leq \|z\|\|w\|$ untuk setiap $z, w \in \mathbb{C}$ \` dan mempunyai identitas 1. Karena memenuhi sifat diatas maka $\mathbb{C}$ adalah aljabar Banach.

Definisikan pemetaan (involusi) $\gamma: z \mapsto \bar{z}$, dengan $\bar{z}$ adalah konjugat dari z. Selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa involusinya memenuhi sifat :

1. $\overline{\lambda z + \mu w} = \overline{\lambda z} + \overline{\mu w} = \bar{\lambda}\,\bar{z} + \bar{\mu}\,\bar{w} =$
2. $\overline{(zw)} = \bar{z}\,\bar{w} = \bar{w}\,\bar{z}$
3. $\bar{\bar{z}} = z$
4. $|\bar{z}| = |z|\ \forall z, w \in \mathbb{C}$

Selain itu dipenuhi juga identitas:

$$|\bar{z}z| = ||z|^2| = |z|^2$$

Jadi $\mathbb{C}$ adalah sebuah aljabar-C^*.

2. Aljabar Fungsi Kontinu $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

Himpunan $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ yang terdiri dari semua fungsi kompleks yang kontinu dengan domain $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ adalah ruang vektor. Perhatikan bahwa jika $f \in \boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, maka f akan terbatas, jadi $Sup\,\{|f(t)|: t \in [0,1]\}$ ada. Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa $\|f\| = Sup\,\{|f(t)|: t \in [0,1]\}$ adalah norm pada $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ dan akan dibuktikan bahwa di bawah norm ini, $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ adalah lengkap. Misalkan $(f_n) \to f$ di $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ adalah sebarang barisan Cauchy di $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$di $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ Perhatikan bahwa jika (f_n) adalah barisan Cauchy artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sedemikian hingga jika $m, n > N$ berlaku

$$\|f_n - f_m\| = Sup\,\{|f_n(t) - f_m(t)|: t \in [0,1]\} < \varepsilon \ldots (*)$$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $n \in N$ sedemikian sehingga berlaku:

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon\ untuk\ m, n > N,\quad t \in [0,1]$$

Karena setiap f_n adalah kontinu di [0,1], maka (f_n) dalah barisan terbatas. Hal ini mengakibatkan terdapat sebuah fungsi terbatas f sedemikian sehingga $f_n \to f$ seragam , berdasarkan kriteria kekonvergenan Cauchy (Bartle, T .17.11). Lebih jauh, f dapat ditunjukkan kontinu di [0,1] (Bartle T 24.1). Dengan demikian $f_n \to f$ di [0,1]. Jadi $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ adalah lengkap.

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ dengan operasi titik demi titik $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ dan identitas 1 adalah sebuah aljabar Banach. Kemudian definisikan involusi, $f^*(x) = \overline{f(x)}$ pada $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ sedemikian hingga sifat involusi (1-4) terpenuhi. Maka $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ adalah aljabar Banach* . Selanjutnya, karena

$$\|\bar{f}.f\| = \||f|^2\| = Sup\,\{|f(t)|^2\} = (Sup\,\{|f(t)|\})^2 = \|f\|^2,$$

$\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ memenuhi identitas aljabar-C^* . Jadi $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ adalah aljabar-C^*.

D. KEUNIKAN NORM ALJABAR-C*

Perhatikan contoh berikut ini:

Misalkan $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ kontinu. Fungsi f disebut "nol di takhingga" bila memenuhi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ dan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Notasikan

$C_0(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ "nol di tak hingga"}\}$

Definisikan:

$$C_0(\mathbb{R})^+ = \{C_0(\mathbb{R})^+ \oplus \mathbb{C} = \{(f, \lambda)\}: f \in C_0(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Dengan operasi jumlah dan skalar pertitik, $C_0(\mathbb{R})^+$ membentuk ruang vektor.

Akan ditunjukkan bahwa $C_0(\mathbb{R})^+$ dengan norm $C_0(\mathbb{R})^+$ $\|(f, \lambda)\|_+ = \|f\| + |\lambda|$ adalah lengkap.

Misalkan (f_n, λ_n) barisan Cauchy di $C_0(\mathbb{R})^+$.

Akan ditunjukkan $(f_n, \lambda_n) \longrightarrow (f, \lambda)$ di $C_0(\mathbb{R})^+$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N sehingga berlaku$\|(f_n, \lambda_n) - (f_m, \lambda_m)\| < \varepsilon$, asalkan $m, n > N$.

Akibatnya diperoleh

$(f_n) \longrightarrow f$ dan $(\lambda_n) \longrightarrow \lambda$. ……..(*)

Sekarang perhatikan bahwa $\|(f_n, \lambda_n) - (f_m, \lambda_m)\| = \|(f_n - f\| + |\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$, karena (*). Jadi $(f_n, \lambda_n) \longrightarrow (f, \lambda)$ di $(f_n, \lambda_n) \longrightarrow (f, \lambda)$, yang berarti $(C_0 R^+, \|.\|)$ lengkap. Oleh karena itu $(C_0 R^+, \|.\|)$ adalah ruang Banach.
Ruang Banach $(C_0 R^+, \|.\|)$ dilengkapi dengan operasi perkalian :

$(f, \lambda)(g, \mu) = (fg + \mu f + \lambda g, \lambda\mu)$, dan identitas 1

membentuk aljabar Banach. Selanjutnya $(C_0 R^+, \|.\|)$ dengan involusi $(f, \lambda)^* = (f^*, \bar{\lambda})$ membentuk aljabar Banach*
Akan diperiksa apakah norm $\|(f, \lambda)\|_+ = \|f\| + |\lambda|$ adalah norm aljabar-*C**;
Misalkan :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; -1 \leq x < 1 \\ -x + 1; 0 \leq x < 1 \\ 0;\ \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Kita hitung:

$$\|(f,-1)^*(f,-1)\|_+ = \|(f^*,\overline{-1})(f,-1)\| = \|f^*f - 1f^* - \bar{1}f, -\bar{1}(-1)\|$$
$$= \|f^*f - 1f^* - \bar{1}f\| + |-1(-1)\_| = \|f^2 - f - f\| + 1 = \|f^2 - 2f\| + 1 = 2,$$

akan tetapi:

$$\|(f, \lambda)\|_+ = (\|f\| + |\lambda|)^2 = 4$$

Jadi $\|(f, \lambda)\|_+ = \|f\| + |\lambda|$, bukan norm aljabar-*C**. Dengan demikian $C_0(\mathbb{R})^+$ dengan operasi jumlah dan skalar pertitik, involusi, dan norm $\|(f, \lambda)\|_+ = \|f\| + |\lambda|$ bukanlah sebuah aljabar-*C**.

Perhatikan contoh diatas, $\|(f, \lambda)\|_+ = \|f\| + |\lambda|$ atas $(C_0 R^+, \|.\|)$ adalah norm aljabar Banach* tapi bukan norm aljabar-*C**. Sekarang definisikan $\|(f, \lambda)\|^+ = \|f + \lambda\|$. Dapat ditunjukkan $\|.\|^+$ mendefinisikan norm yang membuat $C_0(\mathbb{R})^+$sebagai aljabar-*C**.
Berdasarkan definisi operasi perkalian di contoh tiga diperoleh:

$$\left\|(f,\lambda)(f,\lambda)^*\right\| = \left\|f^2 + 2f\lambda, \lambda^2\right\|$$
$$= \left\|f^2 + 2f\lambda + \lambda^2\right\| = \left\|(f,\lambda)^2\right\| = \|(f,\lambda)\|^2$$

Selanjutnya berdasarkan teorema keunikan norm aljabar-*C** berikut ini, kita memperoleh hasil bahwa norm aljabar-*C** adalah tunggal.

Teorema 4.1. Keunikan norm aljabar-C*
Misalkan A suatu Aljabar-*C** dengan norm $\|.\|$ dan $|.|$ adalah norm aljabar Banach pada A yang memenuhi
$|x^*x| = |x|^2, x \in A$. Maka $|x| = \|x\|$ untuk setiap $x \in A$.

E. KESIMPULAN

Misalkan A sebuah aljabar Banach*. A disebut aljabar-C* jika memenuhi identitas: $\|a * a\| = \|a\|^2$, untuk setiap a ϵ A. Penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada sifat menarik lainnya dari aljabar-C*, misalnya aljabar-C* dipandang sebagai aljabar operator.

F. DAFTAR PUSTAKA

Averson, W. (1976). *An Invitation to C*-Algebra.* New York: Springer - Verlag.

Bartle, R.G. (1976). *The Element of Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons.

Bartle, R.G. (2000). *Introduction to Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons.

Halmos, P.L (1951). *Introduction to Hilbert Space*. New York: Chelsea Publising Company.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: John Wiley & Sons.

Raeburn, I. (1993). *C*- Algebras*, Australia: University of Newcastle.

Saxe, K. (2000). *Beginning Functional Analysis*. New York: Springer – Verlag.

Simmons, G.F. (1963). *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw – Hill.